Résumé de cours PRODUIT SCALAIRE 1BAC Science EX BIOF

PROF : ATMANI NAJIB

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$ Etude analytique (2)

-Applications- : cercle

Dans tout ce qui va suivre le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan $(\mathcal{P})$ qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $C(\Omega;r) = \{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{\mathcal{P}}) / \boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{r}\}$

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega,r)$ à une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α , β et γ sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ avec a ; b ; c des réelles

- Si : $a^2+b^2-c \succ 0$ alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$
- Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$
- Si : $a^2+b^2-c \prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

Et : $M(x;y)\in(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle

Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $C(\Omega;r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r, il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $C(\Omega;r)$

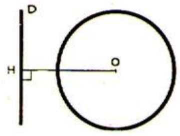
b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $C(\Omega;r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété : Soit $C(O;r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $C(O;r)$ de (D), il suffit de déterminer la distance de O à (D). soit H la projection orthogonal de O sur (D)

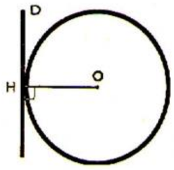
a) Si $d(O;(D))=OH \succ r$



La droite (D) est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$

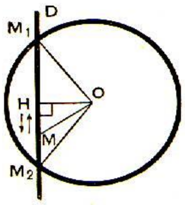
b) $d(O;(D))=OH=r$



Puisque $OH = r$ alors H est un point Commun entre (D) et $(\mathcal{C})$.

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{H\}$ Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en H

c) $\boldsymbol{d(O, (D)) = \Omega H < r}$



Dans ce cas le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite(D) se coupent en deux points M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1M_2]$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1) *Définition :* Une droite (D) est dite tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ s'ils se coupent en un seul point.

2.2) Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}$ (Ω, r) un cercle dans le plan où Ω (a, b) et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}$ (Ω, r) en A

$M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

Propriété : Soient Ω (a, b) un point et $\mathcal{C}$ (Ω, r) un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}(\Omega,r)$ en A à pour équation :

$$(x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$$

.3) Equation paramétrique d'un cercle.

l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r est : $\begin{cases} x=a+r\cos\alpha \\ y=b+r\sin\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.